Physique Générale : Mécanique

10.01: Systèmes de points matériels

Sections SC, GC & SIE , BA1

Dr. J.-P. Hogge

Swiss Plasma Center

École polytechnique fédérale de Lausanne

Version du 4.12.2024

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Aujourd'hui

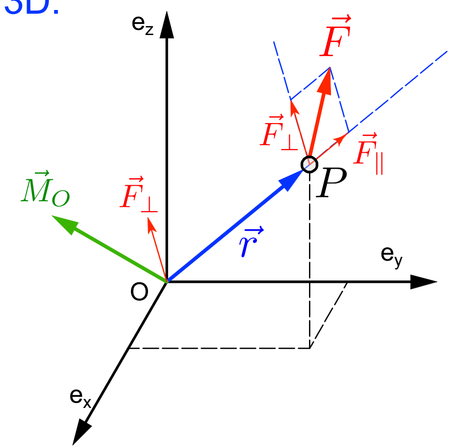
- Rappels:
  - Moment d'une force par rapport à un point O fixe, Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point O, Théorème du moment cinétique
- Système de points matériels
  - Masse totale, Impulsion totale, Moment des forces, Moment cinétique, énergie cinétique.
- Lois de la dynamique pour un système de points matériels
- Centre de masse
  - Mouvement du centre de masse
  - Lois de conservations
- Référentiel du centre de masse
- Propriétés du référentiel du centre de masse

- Moment cinétique par rapport à un point quelconque: Théorème du transfert
- Relation entre le moment cinétique par rapport à un point quelconque et le moment cinétique dans le référentiel du centre de masse: Théorème de Koenig 1
- Relation entre le l'énergie cinétique dans le référentiel du labo et dans le référentiel du centre de masse: Théorème de Koenig 2
- Illustrations: cylindre sur plan incliné, problème à deux corps: collision dans le référentiel du CM

- Faculté des sciences de base
- Swiss Plasma Center

Rappel: Moment d'une force par rapport à un point O

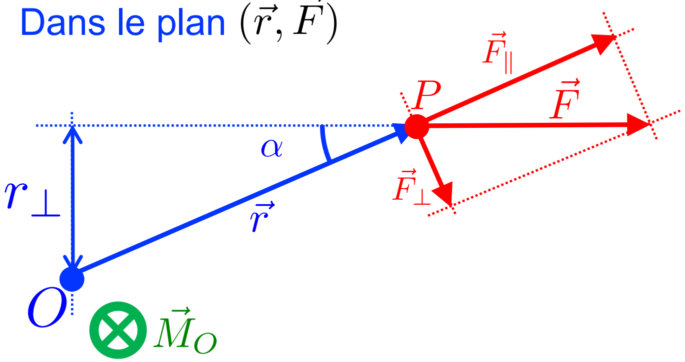
En 3D:



$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

- P est le point d'application de la force.
- O est n'importe quel point du référentiel

Dans le plan $(\vec{r}, \vec{F})$



- Unités: $[\mathrm{N \cdot m}]$, $\left[\frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s^2}}\right]$
- $|\vec{M}_O| = |\vec{r}|\,|\vec{F}_\perp| = |\vec{r}|\,|\vec{F}|\,\sin\alpha$
  $= |\vec{r}_\perp|\,|\vec{F}|$

$|\vec{r}_\perp|$ Bras de levier

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

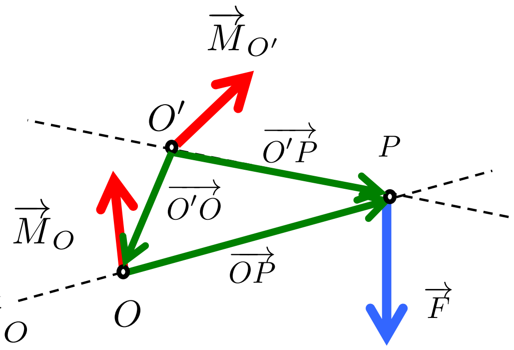
Formule de Varignon (formule de translation du pivot)

Connaissant le moment d'une force F rapport à un point O, la formule de Varignon permet d'évaluer son moment par rapport à un autre point O'.

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_{O'} = \overrightarrow{O'P} \times \vec{F} = \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}\right) \times \vec{F}$$

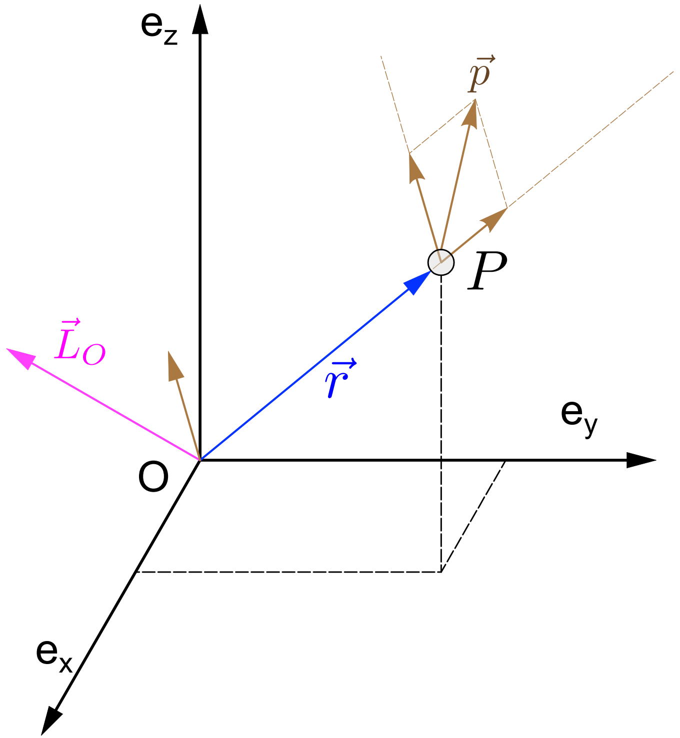
$$= \left(\overrightarrow{O'O} \times \vec{F}\right) + \left(\overrightarrow{OP} \times \vec{F}\right) = \left(\overrightarrow{O'O} \times \vec{F}\right) + \vec{M}_O$$



$$\boxed{\vec{M}_{O'} = \left(\overrightarrow{O'O} \times \vec{F}\right) + \vec{M}_O}$$

Rappel: Moment cinétique d'un point matériel P de quantité de mvt p par rapport à un point O

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$



- Le moment cinétique dépend du point O.
- Unités: $\left[\mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right], \left[\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\right]$

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Théorème:
Si O est un point **fixe** du référentiel, alors

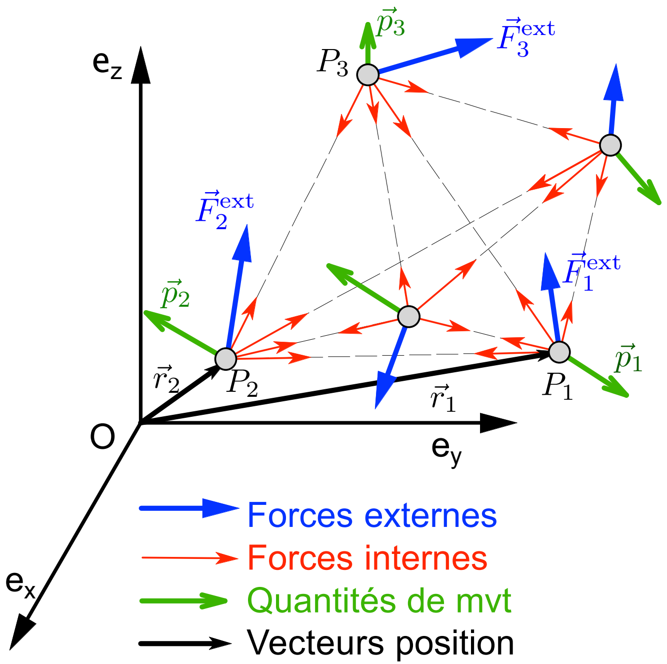
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{p}\right) = m \underbrace{\left(\frac{\overrightarrow{OP}}{dt} \wedge \vec{v}\right)}_{} + \overrightarrow{OP} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O$$

=0 si O est fixe,
≠0 si O n'est pas fixe

Définition: Système de points matériels
Un système est un ensemble (discret ou continu) de points matériels soumis à des forces externes et interagissant entre eux au moyen de forces internes.

Exemples:
- Gaz
- Système de planètes
- Corps solide



Système de points matériels: Masse, quantité de mouvement, moment cinétique, énergie cinétique

[mooc 17.1]

Comme la masse, la quantité de mouvement et les forces sont des **grandeurs extensives**, on peut écrire:

Masse totale

$$M = \sum_\alpha m_\alpha$$

Quantité de mouvement totale

$$\vec{p} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha$$

Energie cinétique totale

$$E_{\text{cin}} = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_\alpha^2$$

Force extérieure totale

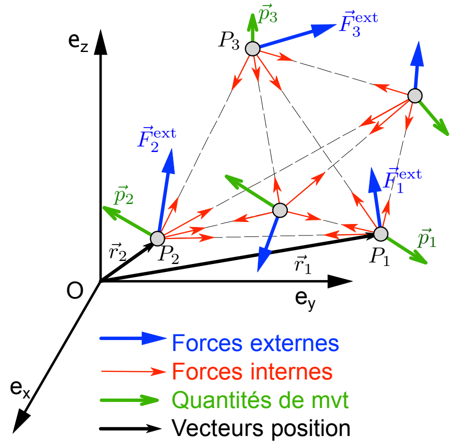
$$\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{\text{ext}}$$

Moment cinétique total par rapport au point O

$$\vec{L}_O = \sum_\alpha \vec{L}_{O\alpha} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha = \sum_\alpha \overrightarrow{OP}_\alpha \times m_\alpha \vec{v}_\alpha$$

Moment total des forces par rapport au point O

$$\vec{M}_O = \sum_\alpha \vec{M}_{O\alpha} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \left(\vec{F}_\alpha^{\text{ext}} + \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}_{\beta\alpha}^{\text{int}} \right)$$

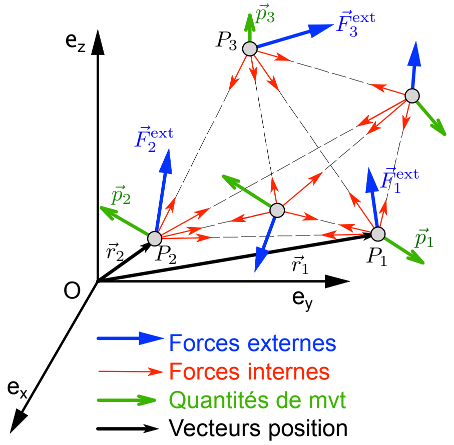


Lois de la dynamique pour un Système de points matériels: Seconde loi de Newton

[mooc 17.1]

- La seconde équation de Newton pour chaque point matériel s'écrit:

$$\frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} + \sum_{\beta\neq\alpha} \vec{F}_{\beta\alpha}^{\text{int}}$$



- On pose:

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{\text{ext}}$$

Résultante des forces externes.

- Si on somme sur tous les points matériels, les force internes vont s'annuler 2 à 2, et on obtient:

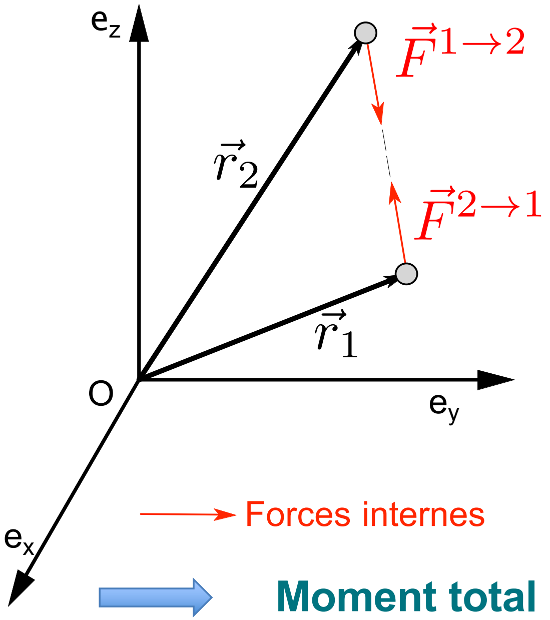
$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}}$$

Seconde loi de Newton pour un système de points matériels

Système de points matériels:
Moment total des forces internes

[mooc 17.1]

Par la troisième loi de Newton (action-réaction), les moments des forces internes s'annulent 2 à 2:



$$
\begin{aligned}
\vec{M}^{\text{int}}_{O_1} + \vec{M}^{\text{int}}_{O_2} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}^{2\to 1} + \vec{r}_2 \times \vec{F}^{1\to 2} \\
&= \vec{r}_1 \times \vec{F}^{2\to 1} - \vec{r}_2 \times \vec{F}^{2\to 1} \\
&= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}^{2\to 1} \\
&= 0 \\
\vec{M}_{O_1} + \vec{M}_{O_2} &= \vec{M}^{\text{ext}}_{O_1} + \vec{M}^{\text{ext}}_{O_2}
\end{aligned}
$$

Moment total des forces par rapport au point O

$$
\boxed{\vec{M}_O = \sum_\alpha \vec{M}_{O\alpha} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}^{\text{ext}}_\alpha = \vec{M}^{\text{ext}}_O}
$$

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Dans le théorème du moment cinétique seules les forces externes contribuent:

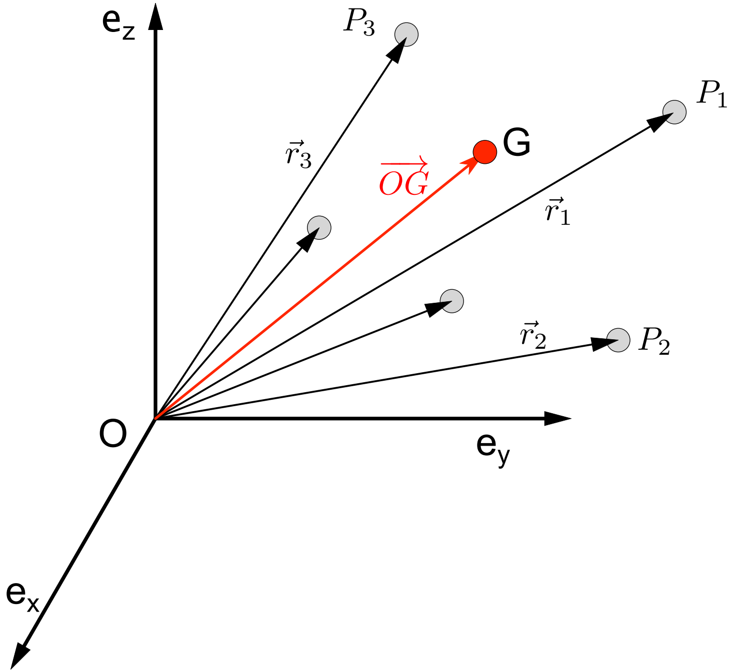
$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}}$$

Théorème du moment cinétique pour un système de points matériels.
O est un point fixe.

Définition: Centre de masse

Le centre de masse G d'un système de points matériels est tel que:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{\alpha} m_\alpha \vec{r}_\alpha$$



Le centre de masse est la somme des rayons vecteurs des points matériels pondérés par leur masse, divisée par la masse totale du système.

Mouvement du centre de masse

- Vitesse du centre de masse:

$$\vec{v}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \frac{\vec{p}}{M} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M\vec{v}_G = \vec{p}}$$

La quantité de mouvement totale d'un système de points matériels est celle qu'aurait un point matériel de masse M et de vitesse v_G

- Accélération du centre de masse:

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{1}{M}\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{F}^{\text{ext}}}{M} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M\vec{a}_G = \vec{F}^{\text{ext}}}$$

Le centre de masse a une accélération correspondant à celle d'un point matériel concentrant toute la masse du système, soumis à la résultante des forces extérieures.

Les lois de la dynamique d'un système de points matériels s'écrivent:

$$\boxed{M\vec{a}_G = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}} \qquad \boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}}$$

1. **Si la résultante des forces extérieures est nulle, alors la quantité de mouvement du système est constante.**

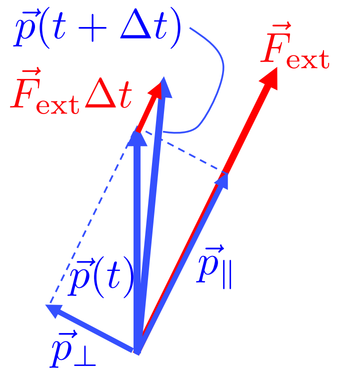
$$\boxed{\vec{F}^{\text{ext}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p} = \text{cste}}$$

2. **Si le moment des forces extérieures est nul, alors le moment cinétique est conservé.**

$$\boxed{\vec{M}_O^{\text{ext}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{L}_O = \text{cste}}$$

Lois de conservation (2)

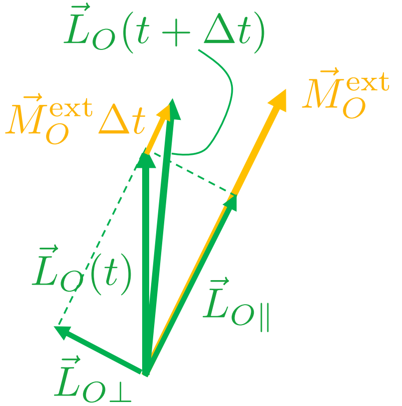
3. **Les composantes de l'impulsion et du moment cinétique qui sont respectivement perpendiculaires à la résultante des forces et au moment total de forces sont constantes**



$$\vec{p} = \vec{p}_{\perp} + \vec{p}_{\|} \quad , \quad \vec{p}_{\perp} \perp \vec{F}^{\text{ext}} \quad , \quad \vec{p}_{\|} \parallel \vec{F}^{\text{ext}}$$

$$\vec{p}_{\perp} \cdot \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{p}_{\perp} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{p}_{\perp} + \vec{p}_{\|}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\vec{p}_{\perp}|^2 + \underbrace{\vec{p}_{\perp}}_{\perp \vec{F}^{\text{ext}}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{p}_{\|}}_{\| \vec{F}^{\text{ext}}} = 0$$

$$\boxed{|\vec{p}_{\perp}|^2 = \text{cste}}$$



$$\vec{L}_O = \vec{L}_{O\perp} + \vec{L}_{O\|} \quad , \quad \vec{L}_{O\perp} \perp \vec{M}_O^{\text{ext}} \quad , \quad \vec{L}_{O\|} \parallel \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

$$\vec{L}_{O\perp} \cdot \vec{M}_O^{\text{ext}} = \vec{L}_{O\perp} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{L}_{O\perp} + \vec{L}_{O\|}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\vec{L}_{O\perp}|^2 + \underbrace{\vec{L}_{O\perp}}_{\perp \vec{M}_O^{\text{ext}}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{L}_{O\|}}_{\| \vec{M}_O^{\text{ext}}} = 0$$

$$\boxed{|\vec{L}_{O\perp}|^2 = \text{cste}}$$

Mouvement du centre de masse: Illustrations

$$M\vec{a}_G = \vec{F}^{\text{ext}}$$

Pendant la phase de vol, la seule force extérieure qui agit sur le motard est la gravitation. La trajectoire du centre de masse est donc une parabole.

- Faculté des sciences de base
- Swiss Plasma Center

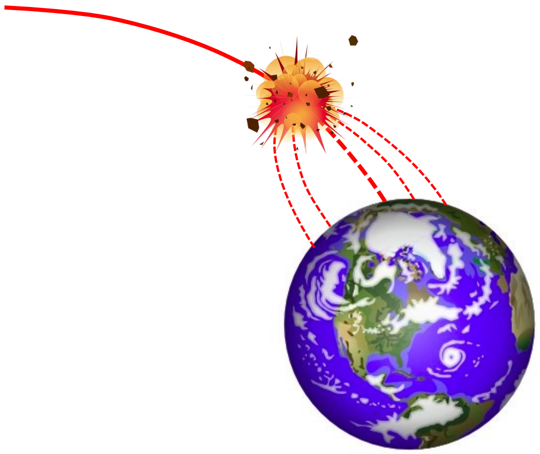
Mouvement du centre de masse: Illustrations

Même si le mouvement est plus compliqué et ne peut être décrit comme celui d'un point matériel, la trajectoire du centre de masse reste une parabole.

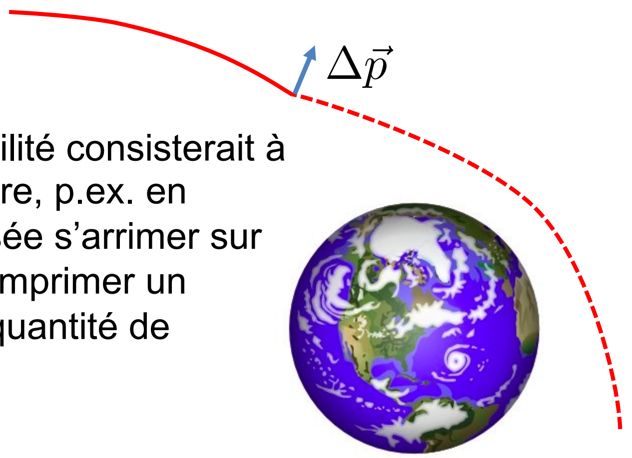
Illustrations: Astéroïde

- La NASA détecte un astéroïde dont la trajectoire coupe celle de la terre et décide d'envoyer une grosse bombe pour le faire exploser en mille morceaux. Est-ce une bonne idée ? …

- … pas forcément, car la trajectoire du centre de masse du système de points matériels formés par les débris de l'astéroïde coupera toujours celle de la terre et bon nombre de débris vont l'atteindre.



- Une autre possibilité consisterait à dévier la trajectoire, p.ex. en envoyant une fusée s'arrimer sur l'astéroïde et lui imprimer un changement de quantité de mouvement.



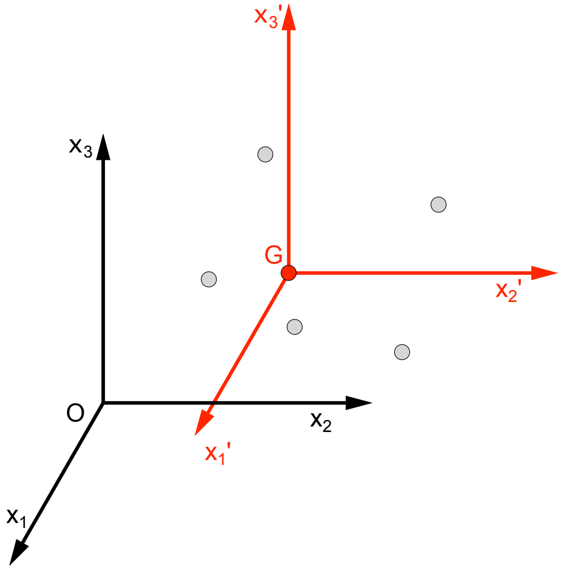
DART: Double Asteroïd Redirection Test: 27 septembre 2022

Référentiel du centre de masse

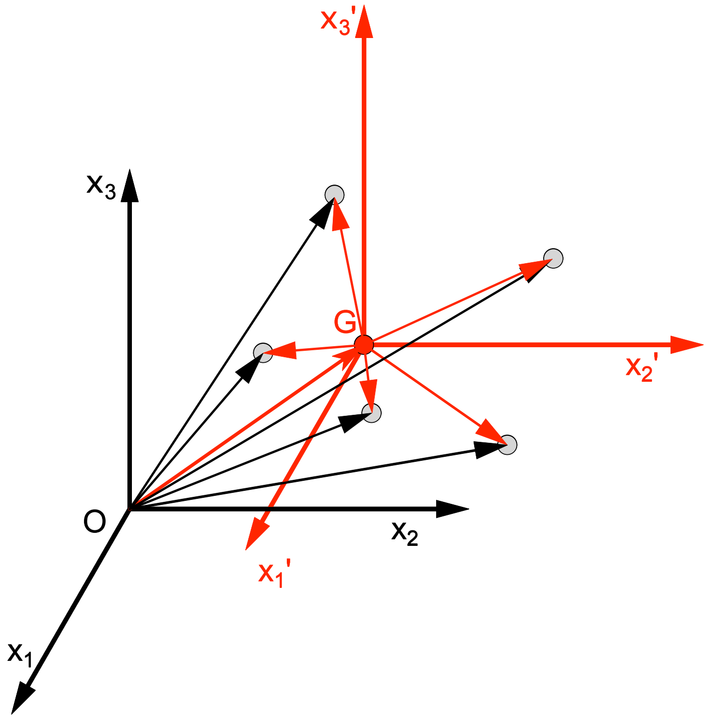
- On considère un référentiel d'inertie R muni d'un repère $(O, \hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2, \hat{\vec{x}}_3)$, et un système de points matériels.

Définition: Référentiel du centre de masse
Référentiel $(G, \hat{\vec{x}}_1', \hat{\vec{x}}_2', \hat{\vec{x}}_3')$ dont l'origine est le centre de masse G du système de points matériels, en translation par rapport à R.

Translation: l'orientation relative des axes. $\mathbf{x}_i$' par rapport aux $\mathbf{x}_j$ ne change pas.



Notations dans le référentiel du centre de masse



Dans le référentiel du labo:

$$\overrightarrow{OP}_\alpha = \vec{r}_\alpha$$

$$\frac{d\overrightarrow{OP}_\alpha}{dt} = \vec{v}_\alpha$$

Dans le référentiel du CM:

$$\overrightarrow{GP}_\alpha = \vec{r}^{\,*}_\alpha$$

$$\frac{d\overrightarrow{GP}_\alpha}{dt} = \vec{v}^{\,*}_\alpha$$

Relations labo - CM:

$$\overrightarrow{OP}_\alpha = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}_\alpha$$

$$\vec{v}_\alpha = \vec{v}_G + \vec{v}^{\,*}_\alpha$$

Propriétés du référentiel du centre de masse

1. Le centre de masse est indépendant de l'origine du référentiel d'inertie

$$\overrightarrow{O'G'} = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \overrightarrow{O'P_\alpha} = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_\alpha}\right) = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{O'G}$$

2. Dans le référentiel du centre de masse, le centre de masse est à l'origine (!)

$$\overrightarrow{GG} = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}^{\,*}_\alpha = 0$$

$$\boxed{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}^{\,*}_\alpha = 0}$$

3. Dans le référentiel du centre de masse, la quantité de mouvement totale est nulle:

$$\vec{p}^{\,*} = \sum_\alpha m_\alpha \frac{d\vec{r}^{\,*}_\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}\underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}^{\,*}_\alpha}_{=0} = 0$$

$$\boxed{\vec{p}^{\,*} = 0}$$

Propriétés du moment cinétique, théorèmes importants

- Jusqu'à présent, nous avons évalué le moment cinétique d'un point matériel ou d'un système de points matériels par rapport à un point fixe O.

- Qu'en est-il si l'on désire évaluer le moment cinétique par rapport à un point qui n'est pas fixe? Dans ce qui suit nous allons:

  - Exprimer le moment cinétique par rapport à un point quelconque A(t) (**théorème du transfert**),

  - réécrire le théorème du moment cinétique pour un point quelconque,

  - Établir les relations avec le moment cinétique évalué dans le référentiel du centre de masse (**théorème de Koenig I**).

  - Etablir la relation entre l'énergie cinétique mesurée dans le référentiel du laboratoire et mesurée dans le référentiel du centre de masse (**théorème de Koenig II**).

Théorèmes importants (spoiler alert)

- O: Point fixe du référentiel du laboratoire.
  A: Point quelconque (peut être en mouvement),
  G: Centre de masse, exposant
  .*: grandeurs évaluées dans le réf du CM.

- **Théorème du transfert:** $\vec{L}_O \iff \vec{L}_A$

$$\boxed{\vec{L}_A = \vec{L}_O + \overrightarrow{AO} \wedge M\vec{v}_G}$$

- **Th. du moment cinétique par rapport à A :**

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -\vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G + \vec{M}_A^{\text{ext}}}$$

- **Théorème de Koenig I:** $\vec{L}_A \iff \vec{L}_G^*$

$$\boxed{\vec{L}_A = \overrightarrow{AG} \wedge M\vec{v}_G + \vec{L}_G{}^*}$$

- **Théorème de Koenig II:** $E_{\text{cin}} \iff E^*_{\text{cin}}$

$$\boxed{E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}Mv_G^2 + E^*_{\text{cin}}}$$

Moment cinétique par rapport à un point quelconque A(t): Théorème du transfert

Le point O est fixe. On désire évaluer le moment cinétique du système de points matériels **par rapport à un point quelconque A = A(t)**.

$$\vec{L}_O = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha \overrightarrow{OP}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha$$

On écrit $\overrightarrow{OP}_\alpha = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}_\alpha\right)$ et on développe:

$$\vec{L}_O = \sum_\alpha m_\alpha \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}_\alpha\right) \wedge \vec{v}_\alpha$$

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha}_{=M\vec{v}_G} + \underbrace{\sum_\alpha \overrightarrow{AP}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha}_{=\vec{L}_A} \quad = \overrightarrow{OA} \wedge M\vec{v}_G + \vec{L}_A$$

Théorème du transfert: $\boxed{\vec{L}_A = \vec{L}_O + \overrightarrow{AO} \wedge M\vec{v}_G}$

Cas particulier: $\boxed{\vec{L}_G = \vec{L}_O - \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{v}_G}$

Théorème du moment cinétique par rapport à un point quelconque A(t)

A partir du théorème du transfert, on réécrit le théorème du moment cinétique pour un point quelconque A(t).

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O + \overrightarrow{AO} \wedge M\vec{v}_G$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{L}_O}{dt}}_{\vec{M}_O^{\text{ext}}} + \underbrace{\frac{d\overrightarrow{AO}}{dt} \wedge M\vec{v}_G}_{-\vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G} + \overrightarrow{AO} \wedge \underbrace{M\frac{d\vec{v}_G}{dt}}_{\sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{\text{ext}}}$$

On se concentre sur le second terme du membre de droite…

$$\overrightarrow{AO} \wedge \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} = \sum_\alpha \left(\overrightarrow{AP_\alpha} + \overrightarrow{P_\alpha O}\right) \wedge \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} = \underbrace{\sum_\alpha \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge \vec{F}_\alpha^{\text{ext}}}_{\vec{M}_A^{\text{ext}}} + \underbrace{\sum_\alpha \overrightarrow{P_\alpha O} \wedge \vec{F}_\alpha^{\text{ext}}}_{-\vec{M}_O^{\text{ext}}}$$

… et on remplace: $$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} - \vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G + \vec{M}_A^{\text{ext}} - \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \underbrace{-\vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G}_{\text{Nouveau terme}} + \vec{M}_A^{\text{ext}}}$$

Théorème du moment cinétique pour un point A quelconque.

Théorème du moment cinétique par rapport à un point quelconque A(t) : cas particuliers

- Cas général: $$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -\vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G + \vec{M}_A^{\text{ext}}$$

- Cas particuliers:

$$\left.\begin{array}{ll} \cdot\ \text{Si} & A = G \\ \cdot\ \text{Si} & \vec{v}_A = 0 \\ \cdot\ \text{Si} & \vec{v}_A \parallel \vec{v}_G \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{\text{ext}}$$

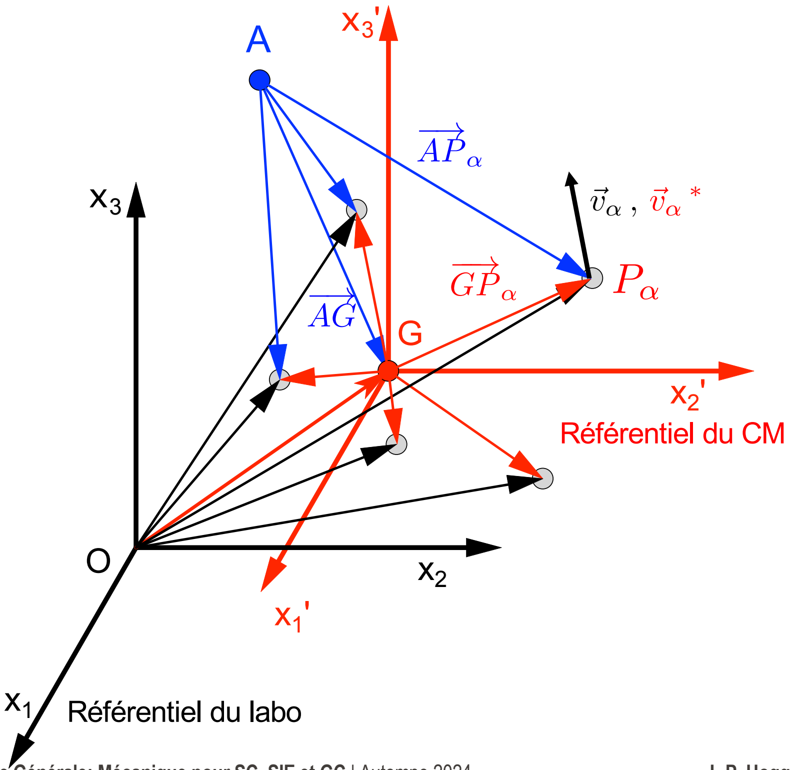
$$\boxed{\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}}$$

Théorème du moment cinétique pour le centre de masse..

Même si le centre de masse est en mouvement, le théorème du moment cinétique s’écrit comme pour un point fixe.

Théorème de Koenig I:

- Le **théorème de Koenig I** est une variante du théorème du transfert, qui permet d'exprimer le moment cinétique par rapport à un point A quelconque en fonction du moment cinétique par rapport au centre de masse, exprimé dans le référentiel du centre de masse.



Moment cinétique par rapport au point A exprimé dans le référentiel du labo

$$\vec{L}_A = \sum_\alpha \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha$$

Moment cinétique par rapport au point G exprimé dans le référentiel du labo

$$\vec{L}_G = \sum_\alpha \overrightarrow{GP_\alpha} \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha$$

Moment cinétique par rapport au point G exprimé dans le référentiel du CM

$$\vec{L}_G^* = \sum_\alpha \overrightarrow{GP_\alpha^*} \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,*}$$

Relation entre $\vec{L}_A, \vec{L}_G, \vec{L}_G^*$?

Théorème de Koenig I:

- On reprend la définition du moment cinétique. Par rapport à un point A quelconque, qui peut être en mouvement:

$$\vec{L}_A = \sum_\alpha \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge m_\alpha \, \vec{v}_\alpha$$

- Comme on cherche à isoler le moment cinétique exprimé dans le référentiel du centre de masse, on exprime les différentes quantités en fonction de G:

$$\overrightarrow{AP_\alpha} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP_\alpha} = \overrightarrow{AG} + \vec{r}_\alpha{}^* \qquad \left(\overrightarrow{GP_\alpha} = \vec{r}_\alpha{}^*\right)$$

$$\vec{v}_\alpha = \vec{v}_G + \vec{v}_\alpha{}^*$$

- En remplaçant:

$$\vec{L}_A = \sum_\alpha \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge m_\alpha \, \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha \left(\overrightarrow{AG} + \vec{r}_\alpha{}^*\right) \wedge m_\alpha \left(\vec{v}_G + \vec{v}_\alpha{}^*\right)$$

Théorème de Koenig I:

- On développe:

$$\vec{L}_A = \sum_\alpha \overrightarrow{AG} \wedge m_\alpha \vec{v}_G + \sum_\alpha \overrightarrow{AG} \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha{}^* + \sum_\alpha \vec{r}_\alpha{}^* \wedge m_\alpha \vec{v}_G + \sum_\alpha \vec{r}_\alpha{}^* \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha{}^*$$

$$\sum_\alpha \overrightarrow{AG} \wedge m_\alpha \vec{v}_G = \overrightarrow{AG} \wedge M \vec{v}_G \qquad \sum_\alpha \overrightarrow{AG} \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha{}^* = \overrightarrow{AG} \wedge \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha{}^*}_{=0} = 0$$

$$\sum_\alpha \vec{r}_\alpha{}^* \wedge m_\alpha \vec{v}_G = \underbrace{\left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha{}^*\right)}_{=0} \wedge \vec{v}_G = 0 \qquad \sum_\alpha \vec{r}_\alpha{}^* \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha{}^* = \vec{L}_G{}^*$$

- Et on trouve finalement:

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AG} \wedge M \vec{v}_G + \vec{L}_G{}^*$$

Théorème de Koenig I:

- Il vient donc:

$$\boxed{\vec{L}_A = \overrightarrow{AG} \wedge M\vec{v}_G + \vec{L}_G{}^*}$$

Théorème de Koenig 1

Le moment cinétique d'un système de points matériels par rapport à un point A(t) quelconque est celui qu'aurait toute la masse du système concentrée au centre de masse, additionnée du moment cinétique par rapport au centre de masse, évalué dans le référentiel du centre de masse.

$\overrightarrow{AG} \wedge M\vec{v}_G$ — **Déf:** Moment cinétique orbital (ou de translation)

$\vec{L}_G{}^*$ — **Déf:** Moment cinétique intrinsèque

- Cas particulier: $A = G$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{L}_G = \vec{L}_G{}^*}$

Le moment cinétique par rapport au centre de masse est indépendant du référentiel dans lequel il est évalué.

Théorème de Koenig II: L'énergie cinétique d'un système de points matériels correspond à celle d'un point matériel portant toute la masse et ayant la vitesse du centre de masse, additionnée de l'énergie cinétique dans le référentiel du CM.

$$E_{\text{cin}} = \sum_\alpha E_{\text{cin}_\alpha} = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

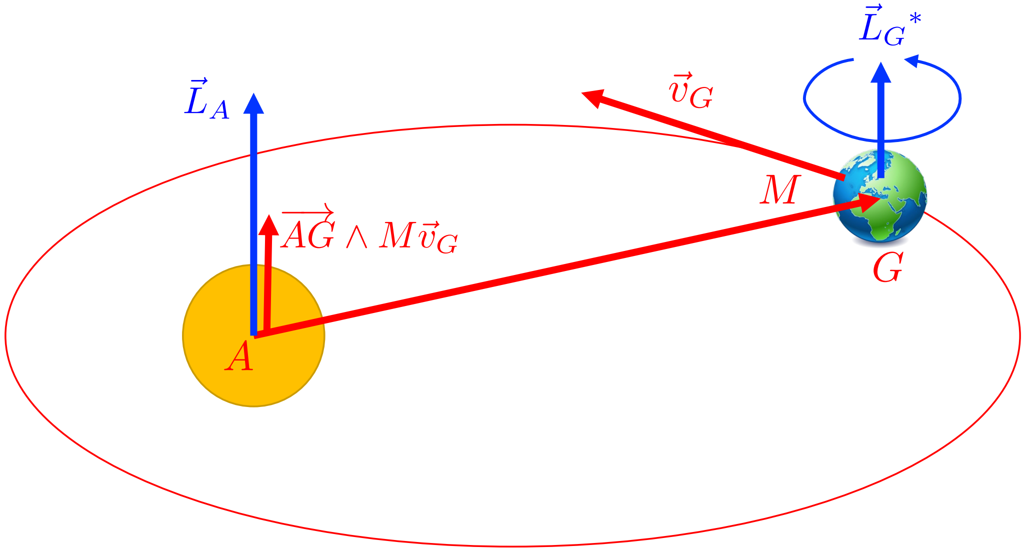
$$= \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \left(\vec{v}_G + \vec{v}_\alpha{}^*\right)^2 = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \left(v_G^2 + 2\vec{v}_G \cdot \vec{v}_\alpha{}^* + v_\alpha^{*2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} M v_G^2 + \vec{v}_G \cdot \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha{}^*}_{=0} + \underbrace{\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^{*2}}_{=E_{\text{cin}}^*}$$

$$\boxed{E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M v_G^2 + E_{\text{cin}}^*}$$

Théorème de Koenig 2

Théorèmes de Koenig I et II: Illustration: Terre autour du Soleil (simplifié)



Moment cinétique orbital $\overrightarrow{AG} \wedge M\vec{v}_G$: dû à la rotation de la terre autour du Soleil.

Moment cinétique intrinsèque $\vec{L}_G{}^*$: dû à la rotation de la Terre sur elle-même.

L'énergie cinétique de la terre a les mêmes deux contributions (König II):

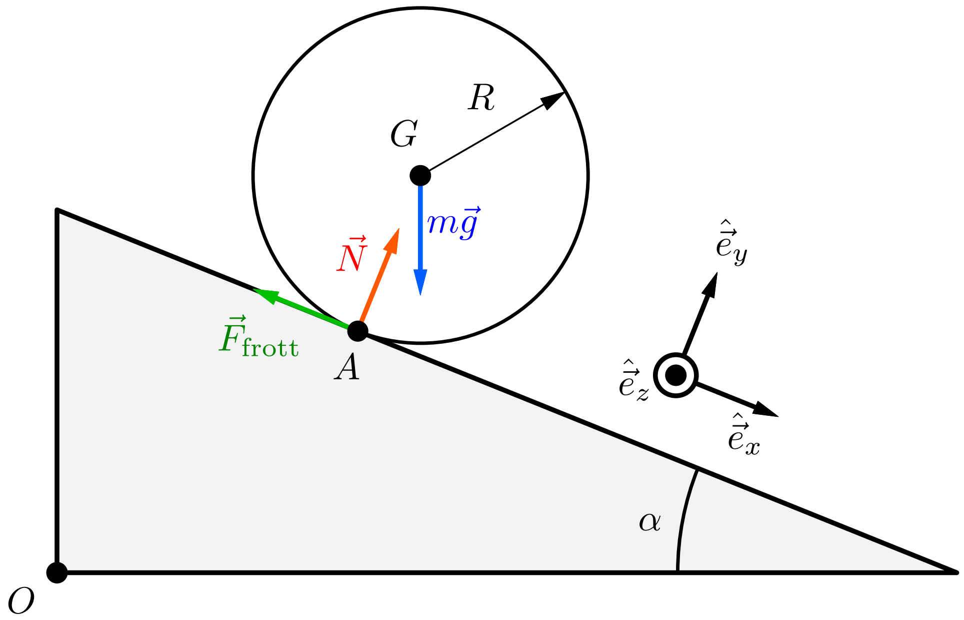
- Energie cinétique due au mouvement autour du Soleil: $\frac{1}{2}Mv_G^2$
- Energie cinétique due à la rotation propre de la Terre: E^*_{cin}

Exemples, illustrations, cas particuliers

Faculté
des sciences
de base

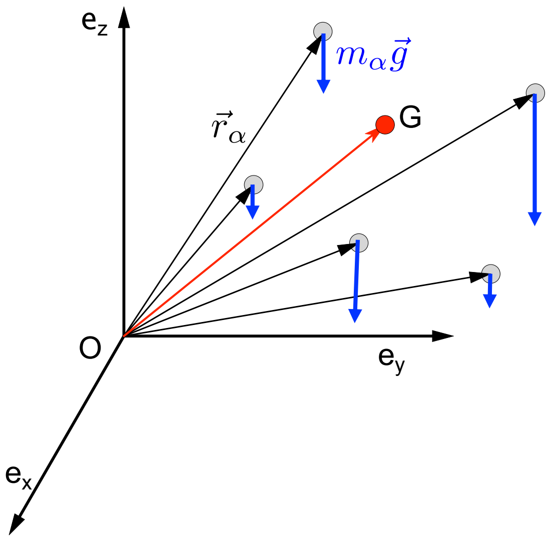
Swiss
Plasma
Center

Théorème du transfert, de Koenig: Illustration: Cylindre sur un plan incliné



Cas particulier: Moment des forces de poids

- On considère un ensemble de points matériels de masses m_α, soumis à la gravitation, et on calcule le moment total de ces forces par rapport à un point O



$$\overrightarrow{M}_O^{\text{ext}} = \sum_\alpha (\vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{g}) = \sum_\alpha (m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{g})$$

$$= \sum_\alpha (m_\alpha \vec{r}_\alpha) \times \vec{g} = \underbrace{\frac{1}{M} \sum_\alpha (m_\alpha \vec{r}_\alpha)}_{=\overrightarrow{OG}} \times M\vec{g}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M}_O^{\text{ext}} = \overrightarrow{OG} \times M\vec{g}}$$

Le moment des forces de pesanteur par rapport à n'importe quel point O est égal à celui qu'aurait toute la masse concentrée au centre de gravité.

Exemple: Collision entre deux corps dans le référentiel du labo et du centre de masse

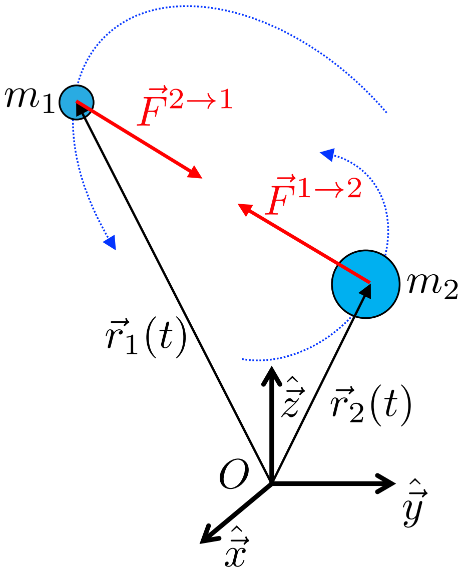
On se propose de traiter l'évolution de deux masses m_1 et m_2 soumises à une interaction. Le traitement se fera dans le référentiel d'inertie (labo) et dans le référentiel du centre de masse pour retrouver les formules précédemment établies.

- Deuxième loi de Newton appliquée à m_1 et m_2

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1 & = & \vec{F}^{2\to 1} \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 & = & \vec{F}^{1\to 2} \end{cases}$$

- Troisième loi de Newton:

$$\vec{F}^{2\to 1} + \vec{F}^{1\to 2} = 0$$



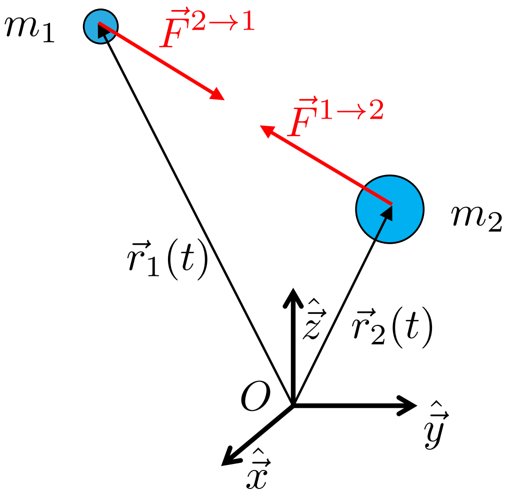
Faculté des sciences de base

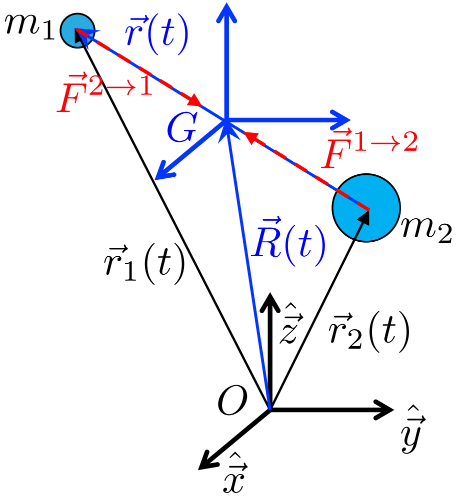
Swiss Plasma Center

Exemple: Collision entre deux corps dans le référentiel du labo et du centre de masse (2)

- Changement de coordonnées: $\left(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)\right) \longrightarrow \left(\vec{R}(t), \vec{r}(t)\right)$

$$\begin{cases} \vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} & : \text{Coordonnées du CM} \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 & : \text{Coordonnées relatives} \end{cases}$$

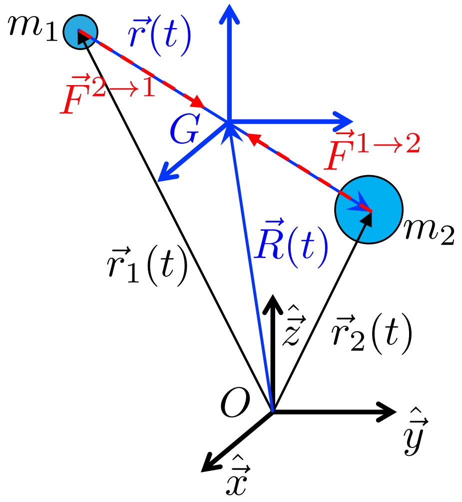




Exemple: Collision entre deux corps dans le référentiel du labo et du centre de masse (3)

On combine les deux équations de Newton appliquées à m_1 et m_2:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}^{2\to 1} + \vec{F}^{1\to 2} = (m_1+m_2)\ddot{\vec{R}} = 0$$



$$\boxed{M\ddot{\vec{R}} = 0}$$

Equ. du mvt du centre de masse

Cette équation est équivalente à

$$M\vec{a}_G = \vec{F}^{\mathrm{ext}} \quad (=0)$$

On combine différemment pour extraire la force d'interaction:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}^{2\to 1} \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}^{1\to 2} \end{cases} \qquad m_1 m_2\ddot{\vec{r}}_1 - m_1 m_2\ddot{\vec{r}}_2 = m_2\vec{F}^{2\to 1} - m_1\vec{F}^{1\to 2}$$

$$m_1 m_2\left(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2\right) = (m_1+m_2)\,\vec{F}^{2\to 1}$$

$$\boxed{\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\ddot{\vec{r}} = \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^{2\to 1}}$$

Equ. du mvt relatif.

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}$$

Masse réduite

Exemple: Collision entre deux corps dans le référentiel du labo et du centre de masse (4)

Dans le référentiel du centre de masse, le mouvement est décrit par une seule particule de masse réduite $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ soumise à la force interne $\vec{F}^{2\to 1}$

Comparons les grandeurs évaluées dans les deux référentiels:

Référentiel du labo

Référentiel du CM

$$\begin{cases} \vec{R} = \dfrac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \dfrac{m_2}{M}\vec{r}_2 \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \dfrac{\mu}{m_1}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \dfrac{\mu}{m_2}\vec{r} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{r}_1{}^* = \dfrac{\mu}{m_1}\vec{r} \\ \vec{r}_2{}^* = -\dfrac{\mu}{m_2}\vec{r} \end{cases}$$

Quantité de mouvement totale:

- Dans le labo: $\vec{p} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = M\dot{\vec{R}} = M\vec{v}_G$
- Dans le CM: $\vec{p}^{\,*} = m_1\dot{\vec{r}}_1{}^* + m_2\dot{\vec{r}}_2{}^* = \mu\dot{\vec{r}} - \mu\dot{\vec{r}} = 0$

On retrouve bien les relations établies précédemment (p. 13 & 21)

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Exemple: Collision entre deux corps dans le référentiel du labo et du centre de masse (5)

Moment cinétique total:

- Dans le labo: $\vec{L}_O = \vec{r}_1 \wedge m_1\dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2\dot{\vec{r}}_2$

$$\vec{L}_O = \vec{r}_1 \wedge m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{\mu}{m_1}\dot{\vec{r}}\right) + \vec{r}_2 \wedge m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{\mu}{m_2}\dot{\vec{r}}\right)$$

$$\vec{L}_O = \underbrace{(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}_{=M\vec{R}} \wedge \dot{\vec{R}} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \mu\dot{\vec{r}} = \vec{R} \wedge M\dot{\vec{R}} + \vec{r} \wedge \mu\dot{\vec{r}}$$

- Dans le CM: $\vec{L}_G^* = \vec{r}_1{}^* \wedge \underbrace{m_1\dot{\vec{r}}_1{}^*}_{\mu\dot{\vec{r}}} + \vec{r}_2{}^* \wedge \underbrace{m_2\dot{\vec{r}}_2{}^*}_{-\mu\dot{\vec{r}}} = (\vec{r}_1{}^* - \vec{r}_2{}^*) \wedge \mu\dot{\vec{r}} = \vec{r} \wedge \mu\dot{\vec{r}}$

$\Rightarrow$ $\vec{L}_O = \vec{R} \wedge M\dot{\vec{R}} + \vec{L}_G^*$ **On retrouve bien le théorème de Koenig 1.**

Exemple: Collision entre deux corps dans le référentiel du labo et du centre de masse (6)

Energie cinétique totale:

- Dans le labo: $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{\ 2} = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}} + \frac{\mu}{m_1}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}} - \frac{\mu}{m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^{\,2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\mu^2\dot{\vec{r}}^{\,2} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^{\,2} + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{\,2}$$

- Dans le CM: $E^*_{\text{cin}} = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\ *2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{\ *2} = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{\mu}{m_1}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{\mu}{m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2$

$$E^*_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\mu^2\dot{\vec{r}}^{\,2} = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{\,2}$$

$\Rightarrow$ $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^{\,2} + E^*_{\text{cin}}$ **On retrouve bien le théorème de Koenig 2.**

Résumé: Systèmes de points matériels

- Masse et la quantité de mouvement d'un système de points matériels:

$$M = \sum_\alpha m_\alpha \qquad \vec{p} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha$$

- Energie cinétique

$$E_{\text{cin}} = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\ 2}$$

- Moment des forces par rapport à un point O

$$\overrightarrow{M}_O = \sum_\alpha \overrightarrow{M}_{O\alpha} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} = \overrightarrow{M}_O^{\text{ext}}$$

- Moment cinétique total:

$$\vec{L}_O = \sum_\alpha \vec{L}_{O\alpha} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha = \sum_\alpha \overrightarrow{OP}_\alpha \times m_\alpha \vec{v}_\alpha$$

- Résultante des forces externes:

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{\text{ext}}$$

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Résumé: Systèmes de points matériels

- Seconde loi de Newton:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}$$

- Théorème du moment cinétique: $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$
- Centre de masse: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha$
- Vitesse, accélération du CM: $M\vec{v}_G = \vec{p}$ $\quad M\vec{a}_G = \vec{F}^{\text{ext}}$
- Référentiel du CM: Centré en G, en translation p.r. au référentiel d'inertie
- Propriétés du CM: Ne dépend pas de l'origine du référentiel

$\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}^{\,*}_\alpha = 0$ Le centre de masse est au centre de masse

$\vec{p}^{\,*} = 0$ La quantité de mouvement totale est nulle dans le référentiel du CM

Résumé: Systèmes de points matériels (2)

Théorème du transfert:

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O + \overrightarrow{AO} \wedge M\vec{v}_G$$ (A quelconque)

Si A = G: $$\vec{L}_G = \vec{L}_O - \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{v}_G$$

Théorème du moment cinétique:

$$\frac{\vec{L}_A}{dt} = -\vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G + \vec{M}_A^{\text{ext}}$$

Cas particuliers:

$$\left.\begin{array}{ll} \cdot\ \text{Si} & A = G \\ \cdot\ \text{Si} & \vec{v}_A = 0 \\ \cdot\ \text{Si} & \vec{v}_A \parallel \vec{v}_G \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{\text{ext}} \qquad \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

(G centre de masse)

Théorème de Koenig I :

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AG} \wedge M\vec{v}_G + \vec{L}_G{}^*$$

$\overrightarrow{AG} \wedge M\vec{v}_G$ Moment cinétique orbital

$\vec{L}_G{}^*$ Moment cinétique intrinsèque

Cas particulier: $$\vec{L}_G = \vec{L}_G{}^*$$

Résumé: Systèmes de points matériels (3)

- Théorème de Koenig II : $E_{\mathrm{cin}} = \frac{1}{2} M v_G^2 + E^*_{\mathrm{cin}}$

- Interaction entre deux corps dans le référentiel du CM:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$ Masse réduite

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}^{2 \to 1}$$ Equation du mouvement relatif

Système de points matériels: aide-mémoire

Définitions générales	$M = \sum_\alpha m_\alpha \qquad \vec{p} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha \qquad \vec{F}^{\text{ext}} = \sum_\alpha \vec{F}^{\text{ext}}_\alpha$			
Référentiel	Labo			Centre de masse
Point	O fixe	A = A(t) quelconque	G = Centre de masse	G = Centre de masse
Définitions, relations, propriétés	$\overrightarrow{OP}_\alpha = \vec{r}_\alpha \qquad \dfrac{d\overrightarrow{OP}_\alpha}{dt} = \vec{v}_\alpha$	$\overrightarrow{OP}_\alpha = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}_\alpha$	$\overrightarrow{OP}_\alpha = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}_\alpha$ $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha$ $\vec{v}_G = \dfrac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha$	$\overrightarrow{GP}_\alpha = \vec{r}^{\,*}_\alpha \qquad \dfrac{d\overrightarrow{GP}_\alpha}{dt} = \vec{v}^{\,*}_\alpha$ $\vec{v}_\alpha = \vec{v}_G + \vec{v}^{\,*}_\alpha$ $\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}^{\,*}_\alpha = 0 \qquad \vec{p}^{\,*} = 0$
Moment des forces	$\vec{M}_O = \vec{M}^{\text{ext}}_O = \sum_\alpha \overrightarrow{OP}_\alpha \times \vec{F}^{\text{ext}}_\alpha$	$\vec{M}_A = \vec{M}^{\text{ext}}_A = \sum_\alpha \overrightarrow{AP}_\alpha \times \vec{F}^{\text{ext}}_\alpha$	$\vec{M}_G = \vec{M}^{\text{ext}}_G = \sum_\alpha \overrightarrow{GP}_\alpha \times \vec{F}^{\text{ext}}_\alpha$	$\vec{M}^{\text{ext}*}_G = \sum_\alpha \overrightarrow{GP}_\alpha \times \vec{F}^{\text{ext}}_\alpha = \vec{M}^{\text{ext}}_G$
Moment cinétique	$\vec{L}_O = \sum_\alpha \overrightarrow{OP}_\alpha \times m_\alpha \vec{v}_\alpha$	$\vec{L}_A = \sum_\alpha \overrightarrow{AP}_\alpha \times m_\alpha \vec{v}_\alpha$	$\vec{L}_G = \sum_\alpha \overrightarrow{GP}_\alpha \times m_\alpha \vec{v}_\alpha$	$\vec{L}^*_G = \sum_\alpha \overrightarrow{GP}_\alpha \times m_\alpha \vec{v}^{\,*}_\alpha$
Théorème du transfert		$\vec{L}_A = \vec{L}_O - \overrightarrow{OA} \wedge M\vec{v}_G$	$\vec{L}_G = \vec{L}_O - \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{v}_G$	
Théorème de Koenig 1				$\vec{L}_A = \overrightarrow{AG} \wedge M\vec{v}_G + \vec{L}_G{}^*$ $\vec{L}_G = \vec{L}_G{}^*$
Théorème du moment cinétique	$\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}^{\text{ext}}_O$	$\dfrac{d\vec{L}_A}{dt} = -\vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G + \vec{M}^{\text{ext}}_A$	$\dfrac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}^{\text{ext}}_G$	$\dfrac{d\vec{L}^*_G}{dt} = \vec{M}^{\text{ext}*}_G$
Loi de Newton	$M\vec{v}_G = \vec{p} \qquad M\vec{a}_G = \vec{F}^{\text{ext}} \qquad \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}$			$\dfrac{d\vec{p}^{\,*}}{dt} = 0$
Energie cinétique	$E_{\text{cin}} = \sum_\alpha \dfrac{1}{2} m_\alpha v^2_\alpha$			$E^*_{\text{cin}} = \sum_\alpha \dfrac{1}{2} m_\alpha v^{*2}_\alpha$
Théorème de Koenig 2				$E_{\text{cin}} = \dfrac{1}{2} M v^2_G + E^*_{\text{cin}}$

■ Faculté des sciences de base

■ Swiss Plasma Center